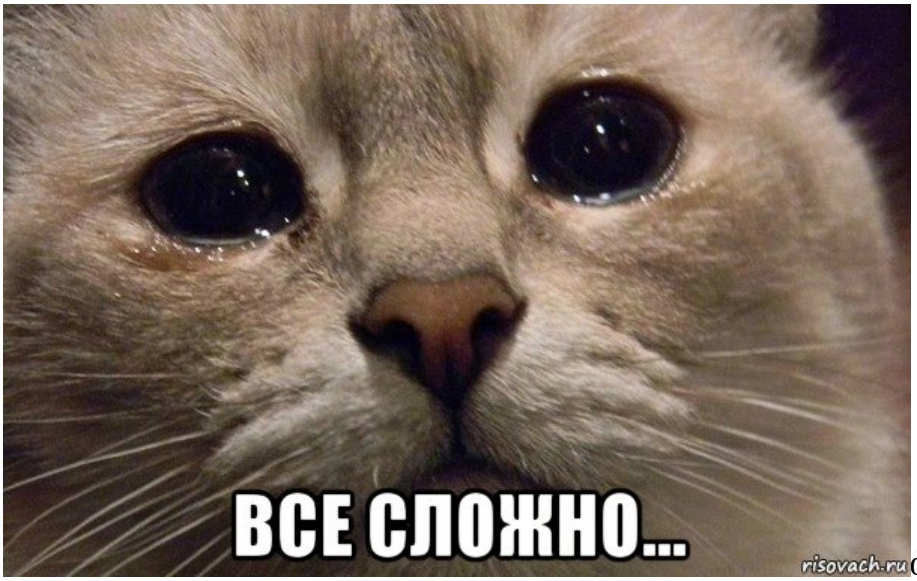
Вероятно, вы немного устали от решения задач 2 и 3 в куче систем координат. Что же, это последний раз. Потом у нас начнётся функция Грина… и поверьте мне, вы будете вспоминать эти задачи с ностальгией ☺

Помните, в полярных координатах когда мы решали задачу 2 со сложным λ-уравнением, получали там функции Бесселя и Неймана, но когда вернулись к простому уравнению Лапласа в задаче 3, все эти сложные



функции заменились на r^n и r^{-n}?

В сферической СК то же самое. Когда мы решаем задачу 2, то там сложное λ-уравнение даёт нам присоединённые функции Лежандра с функциями Бесселя. Теперь мы решаем задачу 3 с простым уравнением Лапласа. Здесь будет чуть попроще: исчезнут функции Бесселя от r.

Я напомню, что уравнение Лапласа в сферической СК мы решали в прошлой методичке и его решение

$$u_{nm}(r,\theta,\varphi) = C_1 r^n Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) + C_2 \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$

В полярной СК у нас были r^n и r^{-n}, помните? А здесь r^n и $r^{-(n+1)}$. Похоже, но есть вот это вот незначительное отличие.

Что же за это сферические функции? Это функции аргументов θ и φ, двух параметров n и m (n ещё обозначают как *l*, далее в методичке будем использовать именно *l*), и ещё бывают двух типов – с косинусом или синусом.

$$Y^c_{lm}(\theta,\varphi) = P_{lm}(\cos\theta)\cos l\varphi$$

$$Y^s_{lm}(\theta,\varphi) = P_{lm}(\cos\theta)\sin l\varphi$$

Вид сферической функцией (с косинусом или синусом), как правило, обозначается буквой c или s.

Причём всегда m≤*l*.
Выбор именно таких букв неслучаен – в квантах m – магнитный момент, *l* – проекция момента импульса на ось. Там тоже m≤*l*. Это не случайное совпадение: если вы глянете вывод атома водорода, то сферические функции играют там достаточно большую роль, так что всё переплетено ☺

Давайте разберём какую-нибудь задачку.
Пусть у нас есть шар радиусом 4, и на его границе такое ГУ

$$u|_{r=4} = Y^c_{22}(\theta,\varphi)$$

Давайте сразу прикинем, какие *l* и m у нас будут. Очевидно, что *l*=m=2, остальных и не будет. Подставляем *l*=m=2 в формулы выше на этой странице.
Получим

$$u = Y^c_{22}(\theta,\varphi)\cdot\left[Ar^{-2} + Br^{-3}\right]$$

Вот теперь везде.
r^{-3} no pasaran, т.к. у нас шар, нарушится условие ограниченности в нуле. Останется

$$u = Y^c_{22}(\theta,\varphi)\cdot A\cdot r^{-2}$$

Почти готовый ответ! Надо определить лишь одну константу – A. В этом нам поможет граничное условие. Подставим r=4:

$$Y^c_{22}(\theta,\varphi) = Y^c_{22}(\theta,\varphi)\cdot A\cdot 16$$

Сферическая функция всплыла в левой части просто потому, что на границе u по условие ей равно, а в правой вышло 16 при подстановке четвёрки в r^2.
Отсюда определяем, что A=1/16. Подставляем в формулу, которую я назвал «почти готовый ответ», и получаем уже готовый ответ:

$$u = \frac{r^2}{16} Y^c_{lm}(\theta,\varphi)$$

Теперь решим задачу не в шаре, а в шаре с вырезанной сердцевиной. Наверняка все ели шарообразные конфеты, в центре которых был шарообразный орех. Ну вот рассмотрим тело, которое образует шоколад в такой орех. Ну вот, я есть захотел. Сейчас есть пойду. Всё, вернулся. Продолжаем.

$$u|_{r=4} = Y^c_{22}(\theta,\varphi)$$

Пусть там для разнообразия будет условие Неймана, а не Дирихле:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = 2Y^c_{22}(\theta,\varphi)$$

А на внешней границе оставим старое ГУ

$$u|_{r=4} = Y^c_{22}(\theta,\varphi)$$

Тогда у нас не занулится $B*r^{-(l+1)}$. Заготовка для ответа будет

$$u = Y_{22}^{c}(\theta, \varphi)\left(Ar^{2} + Br^{-3}\right)$$

И её мы должны подставить при двух r, 1 и 4. Для r=4 тупо подставить, для r=1 предварительно продифференцировать, условие Неймана всё-таки.
При r=4 будет

$$Y_{22}^{c}(\theta,\varphi) = Y_{22}^{c}(\theta,\varphi)\left(2A\cdot 4^{2} - 3\cdot B\cdot 4^{-3}\right)$$

При r=1 будет

$$2Y_{22}^{c}(\theta,\varphi) = Y_{22}^{c}(\theta,\varphi)\left(2A\cdot 1 - 3\cdot B\cdot 1^{-2}\right)$$

Мы получили систему уравнений для A и B.

$$\begin{cases} 1 = 16A + \frac{1}{64}B \\ 2 = 2A - 3B \end{cases}$$

Не будем тратить время на её решение, понятно, что A и B из неё ищутся и подставляются в заготовку для ответа.

Так! А почему у нас и на одной границе $Y_{22}(\theta, \varphi)$, и на другой $Y_{22}(\theta, \varphi)$? Это как-то слишком удачно. Решим такую задачу:

$$\begin{cases} u\big|_{z=2} = Y_{22}^{s}(\theta,\varphi) \\ u + u_z\big|_{z=1} = Y_{31}^{c}(\theta,\varphi) - Y_{22}^{s}(\theta,\varphi) \end{cases}$$

Так-то лучше (и сложнее ☹)
В этом случае u надо искать как (т.н. заготовка под ответ)

$$Y_{22}(\theta,\varphi)\cdot(Ar^2+Br^{-3})+Y_{31}(\theta,\varphi)\cdot(Cr^3+Dr^{-4})$$

Одно из ГУ первого рода, здесь тупо подстановка r=2:

$$Y_{22}^{s}(\theta,\varphi)\cdot(A\cdot 2^2+B\cdot 2^{-3})+Y_{31}^{c}(\theta,\varphi)\cdot(C\cdot 2^3+D\cdot 2^{-4})$$

И это должно быть, по ГУ, $Y_{22}(\theta, \varphi)$ =>

$$\begin{cases} A\cdot 2^2+B\cdot 2^{-3}=1 \\ C\cdot 2^3+D\cdot 2^{-4}=0 \end{cases}$$

Другое ГУ третьего рода. Придётся продифференцировать заготовку и сложить с ней самой:

$$Y_{22}(\theta,\varphi)\cdot(2Ar-3Br^4)+Y_{31}(\theta,\varphi)\cdot(3Cr^2-4Dr^{-5})+$$
$$+Y_{22}(\theta,\varphi)\cdot(Ar^2+Br^{-3})+Y_{31}(\theta,\varphi)\cdot(Cr^3+Dr^{-4})$$

И уже сюда подставлять r=1.

$$Y_{22}^{s}(\theta,\varphi)\cdot(2A-3B)+Y_{31}^{c}(\theta,\varphi)\cdot(3C-4D)+$$
$$+Y_{22}^{s}(\theta,\varphi)\cdot(A+B)+Y_{31}^{c}(\theta,\varphi)\cdot(C+D)$$

И это всё должно быть $Y_{31}(\theta, \varphi)$ - $Y_{22}(\theta, \varphi)$ =>

$$\begin{cases} 3C-4D+C+D=1 \\ 2A-3B+A+B=-1 \end{cases}$$

Всё, у нас нужные 4 уравнения на 4 неизвестных. Что особенно приятно, переменные разделены – система из двух уравнений на A и B

$$\begin{cases} 4A + B/8 = 1 \\ 3A - 2B = -1 \end{cases}$$

И система из двух уравнений на C и D

$$\begin{cases} 8C + \frac{D}{16} = 1 \\ 4C - 3D = 1 \end{cases}$$

Решаем, находим A, B, C, D, подставляем в заготовку для ответа, получаем ответ.

В этой задаче у нас было две сферических функции - $Y_{31}(\theta, \varphi)$ и $Y_{22}(\theta, \varphi)$, именно поэтому у нас было две пары коэффициентов – A и B, C и D. До этого у нас была одна сферическая функция, и была одна пара коэффициентов – A и B.
Если в ГУ будет суммарно участвовать больше сферических функций, то будет и больше пар коэффициентов. Так, если ГУ какое-то такое:

$$\begin{cases} u_2|_{r=2} = 2Y_{10}(\theta, \varphi) + 4Y^c_{11}(\theta, \varphi) - Y_{20}(\theta, \varphi) \\ u|_{r=3} = Y_{20}(\theta, \varphi) + Y^c_{11}(\theta, \varphi) \end{cases}$$

То тут у нас аж четыре сферические функции участвуют, и нам потребуется четыре пары коэффициентов.

Кстати, вы обратили внимание, что Y_{10} и Y_{20} без букв c и s? Дело в том, что при m=0 сферическая функция одна на комбинацию *l* и m. В ней нет в качестве множителя ни cos mφ, ни sin mφ… ну, точнее, есть косинус, но тривиальный: если вы подставите в cos mφ m=0, то получите единицу. Т.е. сферические функции при m=0 вообще от φ не зависят.
Поняли абзац? Если нет, то не отчаивайтесь, поговорим про это потом, когда будем рассматривать конкретный вид сферических функций.

Заготовка под решение будет выглядеть как-то так:

$$AY_{10}(\,,\,)r^{1}+BY_{10}(\,,\,)r^{-2}+CY_{11}^{s}(\,,\,)r^{1}+DY_{11}^{s}(\,,\,)r^{-2}+$$

$$EY_{20}(\,,\,)r^{2}+FY_{20}(\,,\,)r^{-3}+GY_{11}^{c}(\,,\,)r^{2}+HY_{11}^{c}(\,,\,)r^{-3}$$

(я не стал писать буквы θ и φ кучу раз).

Напоминаю, что Y_{11}^{c} и Y_{11}^{s} – это разные функции, и каждой из них требуется своя пара коэффициентов!

Иногда вместо многих латинских букв используют только A и B, но с индексами, соответствующей сферической функцией, с которой перемножается коэффициент. Выглядит это так:

$$AY_{10}(\,,\,)r^{1}+BY_{10}(\,,\,)r^{-2}+CY_{11}^{s}(\,,\,)r^{1}+DY_{11}^{s}(\,,\,)r^{-2}+$$

$$EY_{20}(\,,\,)r^{2}+FY_{20}(\,,\,)r^{-3}+GY_{11}^{c}(\,,\,)r^{2}+HY_{11}^{c}(\,,\,)r^{-3}$$

Именно через Ашки и Вшки с индексами записывается общее решение уравнения Лапласа в сферической системе координат в отрыве от граничных условий:

$$u=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{l}\left(A_{lm}^{c}r^{l}+B_{lm}^{c}r^{-l}\right)Y_{lm}^{c}(\theta,\varphi)+\right.$$

$$\left.\sum_{m=1}^{l}+\left(A_{lm}^{s}r^{l}+B_{lm}^{s}r^{-l}\right)Y_{lm}^{s}(\theta,\varphi)\right)$$

(так как при m=0 нет деления на косинусовую сферическую функцию и синусовую, то я записал суммирование по m в одном случае от 0, а в другом от 1, т.е. учёл сферические функции с m=0 с «косинусовыми» сферическими функциями, у которых m уже натуральное).

Однако если ГУ даны и они выражены через сферической функции, то удобно сразу сообразить, сколько сферических функций будет участвовать (их будет конечное число) и ввести нужное число коэффициентов (или A и B с индексами, или A, B, C, D и т.д., сколько потребуется).

А что, если ГУ не выражены через сферические функции? Такое вполне возможно.
Типичное ГУ выглядит так:

$$u\big|_{z=b} = \sin\theta\cos\theta\sin\varphi + \cos\theta - 3$$

И решение задачи стоит начать того, чтобы понять: то, что перед нами – это сферическая функция? Если да, то какая?
Для этого нужно знать эти сферические функции в лицо. Они выглядят так:

$$Y^{s}_{lm}(\theta,\varphi) = P_{lm}(\cos\theta)\sin m\varphi$$

$$Y^{c}_{lm}(\theta,\varphi) = P_{lm}(\cos\theta)\cos m\varphi$$

Где P_{lm} (cos θ) – присоединённые функции Лежандра, они имеют вид

l=0	m=0	1
l=1	m=0	cos θ
	m=1	sin θ
l=2	m=0	$3\cos^2\theta-1$
	m=1	cos θ * sin θ
	m=2	$\sin^2\theta$
l=3	m=0	$5\cos^3\theta - 3\cos\theta$
	m=1	$(5\cos^2\theta-1)\sin\theta$
	m=2	$\cos\theta * \sin^2\theta$
	m=3	$\sin^3\theta$

Как мы видим, при m=0 нет вообще никакой зависимости от φ. Это то, что я вам говорил – косинусовость или синусовость сферической функции определяется тем, домножается ли функция от θ на косинус или синус mφ. При m=0 домножение идёт на cos mφ = тождественной единице. А домножать на sin mφ не

имеет смысла, потому что получим тождественный нуль. Таким образом, при m=0 сферическая функция одна и не зависит от φ, а для больших m есть косинусовая, а есть синусовая.

Сферическая функция имеет вид коэффициент*многочлен от cos θ неотрицательной степени (в случае нулевой степени это просто констата)*sin θ в неотрицательной степени (если в нулевой, то это просто 1, т.е. этого множителя может и не быть)*sin (mφ) или cos (mφ), где m также неотрицательное (в случае m=0 cos 0 =1, т.е. также этого множителя может не быть).

В общем, если у нас что-то, состоящее только из констант, синусов и косинусов, это что-то может быть сферической функцией. Иначе нет.
Далее мы пытаемся найти это в таблице сферических функций. Поиск можно ускорить, зная следующие закономерности:

1) Степень многочлена относительно sin θ и cos θ равна *l*.
2) Степень sin θ должна быть равна m.
Потренируемся на примерах:

$\sin\theta * (5\cos^2\theta - 1) * \sin\varphi$.
Степень многочлена $\sin\theta * (5\cos^2\theta - 1)$ должна быть *l* => *l*=3
sin θ в первой степени => m=1.
Если это и сферическая функция, то только $Y_{31}(,)$. Убеждаемся, что это действительно она.

$5\cos^3\theta - 3\cos\theta$
Степень многочлена $5\cos^3\theta - 3\cos\theta$ должна быть *l* => *l*=3
sin θ… а его нет, значит, он в нулевой степени => m=0.
Если это и сферическая функция, то только $Y_{30}(,)$. Убеждаемся, что это действительно она.

$\mathrm{Sin}^2\theta * \cos 2\varphi$
Степень многочлена $\sin^2\theta$ должна быть *l* => *l*=2. Ну и она же m, поэтому и m=2.
Проверяем: не является ли эта функция сферической – да, является.

А что, если наша функция из ГУ – не сферическая? Нельзя ли её представить в виде суммы сферических функций?

И тут вы должны задаться вопросом: а любую ли функцию аргументов (θ, φ) можно представить в виде линейной комбинации (возможно, бесконечной) сферических функций? Причём если да, то всегда ли единственным способом? Ответ на оба вопроса: ДА. Со вторым проще, можно легко показать, что все сферические функции ортогональны друг другу. А вот с первым посложнее, это доказывается на лекциях в теме «полнота-замкнутость системы сферфункций».

Итак, алгоритм:
1) Смотрим на функции в ГУ. Может, они уже изначально сферические? Проверяем. Если нет, то раскладываем по сферическим.
2) Смотрим, какие сочетания *l* и m нам попались. Вводим нужное количество коэффициентов, пишем заготовку под ответ (см. первую часть методички).
3) Подставляем ГУ, определяем коэффициенты (что мы также делали в начале методички).

Вернёмся к примеру (представим, например, что это задача для шара радиусом b)

$$u\big|_{r=b} = \sin\theta\cos\theta\sin\varphi + \cos\theta - 3$$

Ну тут у нас сумма $Y_{11}^{s}(\theta, \varphi) + Y_{10}(\theta) - 3Y_{00}$. Ура, мы разложили ГУ по сферическим функциям. Уже соображаем, что нам потребуется 6 коэффициентов и далее действуем по знакомому алгоритму.

Последний нюанс. Вы обратили внимание, что в таблице присоединённых функций Лежандра

l=0	m=0	1	
l=1	m=0	cos θ	
	m=1	sin θ	cos φ, sin φ
l=2	m=0	$3\cos^2\theta-1$	
	m=1	cos θ * sin θ	cos φ, sin φ
	m=2	$\sin^2\theta$	cos 2φ, sin 2φ
l=3	m=0	$5\cos^3\theta - 3\cos\theta$	
	m=1	$(5\cos^2\theta-1)\sin\theta$	cos φ, sin φ
	m=2	cos θ * $\sin^2\theta$	cos 2φ, sin 2φ
	m=3	$\sin^3\theta$	cos 3φ, sin 3φ

Я благополучно начхал на коэффициенты перед присоединёнными функциями Лежандра. И в сферических функциях не будет противных коэффициентов.

В то же время если вы пойдёте гуглить присоединенные функции Лежандра, то вы наткнётесь на

$$l=0 \qquad Y_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\ ;$$

$$l=1 \qquad \begin{cases} Y_{11}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}, \\ Y_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta; \end{cases}$$

$$l=2 \qquad \begin{cases} Y_{22}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\varphi}, \\ Y_{21}=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\varphi}, \\ Y_{20}=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right); \end{cases}$$

$$l=3 \qquad \begin{cases} Y_{33}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{4\pi}}\sin^3\theta\, e^{3i\varphi}, \\ Y_{32}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{4\pi}}\sin^2\theta\cos\theta\, e^{2i\varphi}, \\ Y_{31}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{4\pi}}\sin\theta\,(5\cos^2\theta-1)\, e^{i\varphi}, \\ Y_{30}=\sqrt{\frac{7}{4\pi}}\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta-\frac{3}{2}\cos\theta\right). \end{cases}$$

Во-первых, достаточно нелепую попытку соединить две функции, косинусовую и синусовую, в одну путём мнимой экспоненты.
Для атомки это норм, там ВФ комплексная. В ММФ же всё действительно, поэтому лучше отдельно выделять косинусовые и синусовые сферические функции.
Во-вторых, противные иррациональные коэфы.
Они нужны для одного – чтобы норма каждой сферической функции была 1. Для решения задачи 3 нам вообще чхать на норму. Это в задаче 2 её могут попросить найти, в задаче 3 это не требуется. Так что работайте со сферическими функциями без противных коэфов ☺ Только напишите в самостоятельных «будем работать со сферическими функциями без учёта иррациональных коэффициентов», чтобы никто не придрался.
Напротив, в атомке ВФ по-хорошему надо нормировать. Но у нас методички по ММФ, а не атомке, так что оставим нормировку атомщикам ☺